

HEC 2011

Éléments de correction

Première partie

1. **a.** Le calcul montre que $J^2 = 3J$ c'est-à-dire que J est annihilée par le polynôme $X^2 - 3X = X(X - 3)$. Dans ces conditions, 0 et 3 sont les seules valeurs propres éventuelles de J . On vérifie que 0 en est bien valeur propre car $\text{rg} J = 1 < 3$, ainsi que 3 puisque $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3 (la somme des coefficients sur chaque ligne de J étant égale à 3).
- b.** On a $A = \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}I_3$. Ainsi $A - \lambda I_3 = \frac{1}{2}(J - (2\lambda + 1)I_3)$ n'est pas inversible si, et seulement si, $2\lambda + 1$ est valeur propre de J . Les valeurs propres de A sont donc $-\frac{1}{2}$ et 1, si bien que $\varrho(A) = 1$.
- c.** On justifie par une récurrence immédiate que $J^n = 3^{n-1}J$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit pour tout $n \geq 1$, par application de la formule du binôme dans $M_3(\mathbb{R})$ à I_3 et J qui commutent, puis dans \mathbb{R} , que :

$$\begin{aligned} A^n &= \frac{1}{2^n}(J - I_3)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} J^k = \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} J + (-1)^n I_3 \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3} J + (-1)^n I_3 \right) = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\alpha_n = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \geq 0.$$

Il en ressort que

$$\forall n \geq 1, \quad N(A^n) = \alpha_n + 2\beta_n = 1.$$

- d.** Il ressort immédiatement de l'expression obtenue en **c.** que (A^n) converge vers $M = \frac{1}{3}J$. La matrice M est de rang 1 et représente un projecteur : $M^2 = \frac{1}{9}J^2 = \frac{1}{3}J = M$.
2. **a.** La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : $\text{Sp} A = \{1, 1 + \mathbf{i}, 1 - \mathbf{i}\}$. Admettant trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$. Par ailleurs, on calcule sans difficulté $N(A) = 1 + \sqrt{2}$ et $\varrho(A) = \sqrt{2}$.
- b.** On obtient immédiatement les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0)$, propres pour A respectivement associés aux valeurs propres 1 et $1 + \mathbf{i}$. La résolution du système $AX = (1 - \mathbf{i})X$ fait émerger le vecteur $v_3 = (0, 1, -2\mathbf{i})$, propre pour A associé à la valeur propre $1 - \mathbf{i}$.
Les trois vecteurs v_1, v_2, v_3 étant propres pour A , associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes, ils forment une famille libre de cardinal 3 en dimension 3, donc une base de $M_{3,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de A .
- c.** En notant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) , la formule de changement de base appliquée à l'endomorphisme canoniquement associé à A donne :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

On montre alors par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2\mathbf{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \mathbf{i})^n & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \mathbf{i})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2\mathbf{i}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\mathbf{i}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \mathbf{i})^n & \gamma_n \\ 0 & 0 & (1 - \mathbf{i})^n \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \gamma_n &= \frac{1}{2\mathbf{i}} \left((1 + \mathbf{i})^n - (1 - \mathbf{i})^n \right) = \Im(1 + \mathbf{i})^n \\ &= \Im(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n = \sqrt{2}^n \sin \frac{n\pi}{4} \end{aligned} \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A^n apparaissent sur la diagonale de D^n semblable à A^n , d'où l'expression de $\varrho(A^n) = \sqrt{2^n} = \varrho(A)^n$.

d. Il vient d'après l'expression précédente de A^n :

$$\forall n \geq 1, \quad N(A^n) = \max\left(1, \sqrt{2^n}, \sqrt{2^n} + \sqrt{2^n} \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right| \right) = 2^{n/2} \left(1 + \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right| \right).$$

On a alors

$$\forall n \geq 1, \quad \sqrt{2} \leq N(A^n)^{1/n} = \sqrt{2} \left(1 + \left| \sin \frac{n\pi}{4} \right| \right)^{1/n} \leq \sqrt{2} \cdot 2^{1/n}$$

d'où, par encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(A^n)^{1/n} = \sqrt{2} = \varrho(A).$$

Deuxième partie

3. La relation $AX = \lambda X$ s'écrit :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j = \lambda x_k$$

d'où, en particulier pour $k = k_0$,

$$|\lambda x_{k_0}| = \left| \sum_{j=1}^p a_{k_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^p |a_{k_0,j} x_j| \leq |x_{k_0}| \sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}|$$

puis, en simplifiant par $|x_{k_0}| > 0$,

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^p |a_{k_0,j}| \leq N(A).$$

Ainsi $N(A)$ majore le module de chaque valeur propre de A et donc le plus grand $\varrho(A)$ d'entre eux : $0 \leq \varrho(A) \leq N(A)$.

4. a. Il vient par récurrence immédiate $A^n X = \lambda^n X$, ce qui montre (le vecteur X étant non nul comme vecteur propre de A) que λ^n est valeur propre de A^n , d'où l'on déduit que $|\lambda^n| \leq \varrho(A^n)$. Cette inégalité étant valable pour toute valeur propre λ de A , et en particulier lorsque $|\lambda| = \varrho(A)$, il en ressort que $\varrho(A)^n \leq \varrho(A^n)$.

b. Il suffit de justifier que :

$$X^n - \mu = \prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha_j).$$

C'est le cas si $\mu = 0$ en considérant que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont nuls. Si le complexe μ est non nul, il admet n racines n -ièmes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux-à-deux distinctes, qui sont autant de racines du polynôme $X^n - \mu$. Ce dernier est donc divisible par $\prod_{j=0}^{n-1} (X - \alpha_j)$. Ces deux polynômes étant par ailleurs unitaires de degré n , ils sont donc égaux, ce qui explique la factorisation précédente.

c. Si aucun des complexes $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ n'était valeur propre de A , alors toutes les matrices $A - \lambda_j I_p$ seraient inversibles, et il en irait de même de leur produit $\prod_{j=0}^{n-1} (A - \lambda_j I_p) = A^n - \mu I_p$, en contradiction avec le fait que μ est valeur propre de A^n . C'est donc qu'il existe $j_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que α_{j_0} soit valeur propre de A .

d. Il vient $\varrho(A^n) = |\mu| = |\alpha_{j_0}|^n \leq \varrho(A)^n$ car $|\alpha_{j_0}| \leq \varrho(A)$ étant donné que α_{j_0} est valeur propre de A . Avec l'inégalité de la question **a.**, on en déduit que $\varrho(A)^n = \varrho(A^n)$.

En appliquant les inégalités de la question **3.** à la matrice A^n , on obtient alors

$$0 \leq \varrho(A) = (\varrho(A^n))^{1/n} = \varrho(A^n)^{1/n} \leq N(A^n)^{1/n}.$$

5. En notant $A^n = (a_{k,j}(n))_{1 \leq k,j \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, la convergence de (A^n) vers 0 signifie que

$$\forall k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{k,j}(n) = 0.$$

Dans ces conditions,

$$0 \leq N(A^n) \leq \sum_{1 \leq k,j \leq p} |a_{k,j}(n)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

d'où l'on déduit par encadrement que $N(A^n)$ converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Toujours par encadrement, on déduit alors de la question **4.d.** que la suite géométrique $(\varrho(A)^n)$ converge également vers 0, ce qui signifie que $|\varrho(A)| < 1$.

6. a. La matrice A étant supposée diagonalisable, il existe $P \in \mathbf{GL}_p(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Si $\rho(A) < 1$, alors les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de D i.e. les valeurs propres de A vérifient $|\lambda_j| < 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Dans ces conditions, les propriétés admises en début d'énoncé assurent que :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \operatorname{diag}(\lambda_1^n, \dots, \lambda_p^n)P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P0P^{-1} = 0.$$

- b. Avec les notations de la question a., on a $P^{-1}A_\varepsilon P = D_\varepsilon = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} D$. Les valeurs propres de A_ε sont donc les coefficients diagonaux de D_ε : ce sont les complexes $\frac{\lambda_j}{\rho(A) + \varepsilon}$, $1 \leq j \leq p$. Par suite,

$$\rho(A_\varepsilon) = \max_{1 \leq j \leq p} \left| \frac{\lambda_j}{\rho(A) + \varepsilon} \right| = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} \max_{1 \leq j \leq p} |\lambda_j| = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1.$$

La matrice A_ε étant diagonalisable comme on vient de le voir, la question a. assure alors que la suite (A_ε^n) converge vers la matrice nulle. D'après la question 5., cela implique la convergence de $N(A_\varepsilon^n)$ vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. D'après la définition de la convergence, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $N(A_\varepsilon^n) \leq 1$.

- c. C'est immédiat par homogénéité de l'application N (pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $N(\alpha B) = |\alpha| N(B)$) sachant que $A_\varepsilon = (\rho(A) + \varepsilon)A$.

- d. Pour $n \geq n_0$, il vient d'après b. et c. $N(A^n)^{1/n} = (\rho(A) + \varepsilon)N(A_\varepsilon^n)^{1/n} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Ainsi, d'après les questions 3. et 4.d.,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \rho(A) \leq N(A^n)^{1/n} \leq \rho(A) + \varepsilon,$$

ce qui établit la convergence de la suite $(N(A^n)^{1/n})$ vers $\rho(A)$.

Troisième partie

7. En notant $A^n = (a_{k,j}(n))_{1 \leq k,j \leq p}$ et $B^n = (b_{k,j}(n))_{1 \leq k,j \leq p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tous $k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $0 \leq b_{k,j}(n) \leq a_{k,j}(n)$. C'est vrai par hypothèse au rang $n = 1$ et si le résultat est acquis à un rang $n \geq 1$ donné alors :

$$\forall k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad 0 \leq b_{k,j}(n+1) = \sum_{\ell=1}^p b_{k,\ell} b_{\ell,j}(n) \leq \sum_{\ell=1}^p a_{k,\ell} a_{\ell,j}(n) = a_{k,j}(n+1)$$

par hypothèse de récurrence, sachant tous les coefficients positifs ou nuls, ce qui constitue le résultat au rang $n + 1$.

Il en résulte immédiatement pour $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^p |b_{k,j}(n)| \leq \sum_{k=1}^p a_{k,j}(n) \leq N(A^n)$$

d'où l'on déduit que $N(B^n) \leq N(A^n)$.

Par suite, $N(B^n)^{1/n} \leq N(A^n)^{1/n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui donne $\rho(B) \leq \rho(A)$ par passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ d'après le résultat admis en fin de deuxième partie.

8. L'hypothèse s'écrit $AU = sU$ où $U = (1, \dots, 1)$ et implique par récurrence immédiate $A^n U = s^n U$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où l'on déduit que $N(A^n) = s^n$ sachant que les coefficients de A^n sont tous positifs ou nuls comme on l'a vu en 7.. Ainsi $N(A^n)^{1/n} = s$ puis $\rho(A) = s$ par passage à la limite lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque. On peut conclure sans utiliser le résultat admis : une fois observé que s est valeur propre de A , il vient $s \leq \rho(A) \leq N(A)$ d'après 3., mais aussi $N(A) = s$ par hypothèse.

9. Soient L_1, \dots, L_p les lignes de A . En notant $A' = (a'_{k,j})_{1 \leq k,j \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de lignes L'_1, \dots, L'_p définies par $L'_k = \frac{\sigma}{\sigma_k} L_k$ où $\sigma_k = \sum_{j=1}^p a_{k,j} \geq \sigma$ pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a :

$$\forall k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad 0 \leq a'_{k,j} = \frac{\sigma}{\sigma_k} a_{k,j} \leq a_{k,j}$$

car A est à coefficients positifs ou nuls, d'où $\rho(A') \leq \rho(A)$ d'après la question 7.. La matrice A' vérifiant les conditions de la question 8., on a par ailleurs $\rho(A') = \sigma$ d'où finalement $\sigma \leq \rho(A) \leq N(A)$ d'après la question 3..

10. a. La matrice Δ_X est inversible car diagonale à coefficients diagonaux tous non nuls.

Quant au calcul demandé, il peut être effectué directement, ou en se souvenant que la multiplication d’une matrice A à droite (resp. à gauche) par une matrice diagonale D de coefficients diagonaux d_1, \dots, d_n non nuls a pour effet de multiplier chaque colonne C_j de A par d_j (resp. chaque ligne L_k de A par d_k). Mais on peut aussi raisonner géométriquement : en interprétant Δ_X comme la matrice de passage de la base canonique $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ de \mathbb{R}^p à la base $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ définie par $e_j = x_j \varepsilon_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la matrice $B = \Delta_X^{-1} A \Delta_X = (b_{k,j})_{1 \leq k, j \leq p}$ représente l’endomorphisme ϕ_A canoniquement associé à A dans la base \underline{e} . Or

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \phi_A(e_j) = x_j \phi_A(\varepsilon_j) = x_j \sum_{k=1}^p a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^p \frac{x_j}{x_k} a_{k,j} e_k$$

d’où, par identification sur la base \underline{e} , le coefficient générique de B :

$$\forall k, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad b_{k,j} = \frac{x_j}{x_k} a_{k,j}.$$

- b.** C’est une application directe du résultat de la question 9. à la matrice $\Delta_X^{-1} A \Delta_X$ vu son coefficient générique obtenu en **a.**, qui admet les mêmes valeurs propres que la matrice A à laquelle elle est semblable si bien que $\varrho(\Delta_X^{-1} A \Delta_X) = \varrho(A)$.
- c.** Pour $\beta \geq 0$ tel que $\beta X < AX$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \beta < \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j.$$

En écrivant en particulier cette inégalité pour l’entier $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ minimisant le membre droite, on en déduit d’après **b.** que

$$\beta < \min_{1 \leq k \leq p} \frac{1}{x_k} \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j \leq \varrho(A).$$

Quatrième partie

On note $X = (x_1, \dots, x_p)$.

- 11. a.** Il vient, par application du résultat de la question 9. à la matrice strictement positive A :

$$\varrho(A) \geq \min_{1 \leq k \leq p} \sum_{j=1}^p a_{k,j} > 0.$$

- b.** Par inégalité triangulaire et par positivité de A , il vient :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^k a_{k,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^p a_{k,j} |x_j|,$$

ce qui traduit précisément que $|AX| \leq A|X|$. Sachant que X est propre pour A associé à la valeur propre λ de module $\varrho(A)$, on a par ailleurs $|AX| = |\lambda X| = |\lambda| |X| = \varrho(A) |X|$, d’où finalement $\varrho(A) |X| \leq A|X|$.

- c.** Le vecteur X étant non nul en tant que vecteur propre de A , il existe $j_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $x_{j_0} \neq 0$ et alors, par positivité de $|X|$ et stricte positivité de A :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^p a_{k,j} |x_j| \geq a_{k,j_0} |x_{j_0}| > 0,$$

ce qui montre que $Z = A|X| > 0$.

- d.** On a vu en **b.** que $Y \geq 0$ à partir de quoi on montre, comme en **c.**, que $Y \neq 0$ implique $AY > 0$ i.e. $\varrho(A)Z < AZ$.
- e.** Sous l’hypothèse $Y \neq 0$, on peut donc appliquer la question 10.c. au réel positif $\beta = \varrho(A)$, ce qui conduirait à la conclusion $\varrho(A) < \varrho(A)$... C’est donc que $Y = 0$ i.e. $A|X| = \varrho(A) |X|$: comme $X \neq 0$, cela montre que $|X|$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\varrho(A)$.

- 12. a.** On reprend la démonstration de l’inégalité triangulaire. On a :

$$\begin{aligned} (|z_1| + |z_2|)^2 - |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| - (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= 2|z_1 z_2| - 2\Re(z_1 \overline{z_2}) = 2|z_1 z_2| (1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned}$$

L'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ implique donc, puisque z_1 et z_2 sont non nuls, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$ i.e. l'égalité des deux réels θ_1 et θ_2 de l'intervalle $[0, 2\pi[$.

b. On procède par récurrence sur $p \geq 2$. Le cas $p = 2$ vient d'être traité dans la question **a.**. On le suppose à présent, pour $p \geq 3$ donné, acquis au rang $p - 1$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$\left| \sum_{j=1}^p z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{p-1} z_j + z_p \right| \leq \left| \sum_{j=1}^{p-1} z_j \right| + |z_p| \leq \sum_{j=1}^{p-1} |z_j| + |z_p| = \sum_{j=1}^p |z_j|$$

et l'égalité des membres extrémaux n'est possible que si les deux inégalités sont des égalités : pour la seconde, cela implique par hypothèse de récurrence que z_1, \dots, z_{p-1} ont même argument, qui est alors aussi celui de leur somme, de ce fait non nulle. Quant à la première, cela implique alors que z_p a même argument que $z_1 + \dots + z_{p-1}$ et donc que z_1, \dots, z_{p-1} , d'où le résultat.

13. D'après la question **11.**, $\varrho(A) |X| = A |X| = Z > 0$ avec $\varrho(A) > 0$ d'où l'on déduit que $|X| > 0$. Comme on l'a vu en **11.b.**, l'égalité $\varrho(A) |X| = A |X|$ établie en **11.e.** s'écrit encore $|AX| = A |X|$, c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \left| \sum_{j=1}^p a_{k,j} x_j \right| = \sum_{j=1}^p |a_{k,j} x_j|$$

par positivité de A . Pour $k = 1$ par exemple, la question **12.b.** assure que les complexes $a_{1,1}x_1, \dots, a_{1,p}x_p$, non nuls comme on vient de le voir, ont même argument. Par stricte positivité de A de nouveau, on en déduit que x_1, \dots, x_p ont même argument, d'où le résultat.

14. a. D'après les questions **11.e.** et **13.**,

$$\varrho(A) |X| = A |X| = AXe^{-i\theta} = \lambda X e^{-i\theta} = \lambda |X|$$

d'où l'on déduit que $\lambda = \varrho(A)$ sachant que $X \neq 0$.

b. Sous les hypothèses de l'énoncé, le vecteur $u_1V - v_1U$ appartient au sous-espace propre de A pour la valeur propre $\varrho(A)$. Sa première coordonnée étant nulle, il ne peut s'agir que du vecteur nul d'après **13.** : $u_1V - v_1U = 0$, ce qui implique $u_1 = v_1 = 0$ puisque la famille (U, V) est libre, et contredit donc le résultat de la question **13.**. Il ne peut donc exister deux vecteurs linéairement indépendants dans le sous-espace propre pour la valeur propre $\varrho(A)$, non nul d'après **11.e.**, qui est donc de dimension 1.

15. a. Par invariance du rang, on a $\text{rg}(A - \lambda I_p) = \text{rg} {}^t(A - \lambda I_p) = \text{rg}({}^tA - \lambda I_p)$ pour tout complexe λ . Un complexe λ étant valeur propre de A (resp. de tA) si, et seulement si, $\text{rg}(A - \lambda I_p) < p$ (resp. $\text{rg}({}^tA - \lambda I_p) < p$), les matrices A et tA ont donc mêmes valeurs propres.

b. D'après les questions **14.a.** et **a.**, $\varrho(A)$ est la valeur propre de module maximal de la matrice strictement positive tA . Dans ces conditions, la question **14.b.** assure que le sous-espace propre associé est une droite, dirigée par un vecteur ayant toutes ses coordonnées strictement positives d'après **11.e.** et **13.**. Les coordonnées du vecteur Z , qui en est nécessairement un multiple non nul, sont donc toutes strictement positives ou toutes strictement négatives.

c. Le réel tZU ayant d'après **b.** même signe que chacune des coordonnées de Z , toutes non nulles, on a $Y > 0$. Par ailleurs, Z étant valeur propre de tA pour la valeur propre $\varrho(A)$, il en va de même pour $Y : {}^tAY = \varrho(A)Y$. Enfin, le calcul donne ${}^tYU = \frac{1}{{}^tZU} {}^tZU = 1$.

16. a. Dans cette question, on identifie M à l'endomorphisme de \mathbb{R}^p qui lui est canoniquement associé. Il vient immédiatement $M^2 = (U^tY)(U^tY) = U({}^tYU){}^tY = U^tY = M$ d'après **15.c.**, ce qui montre que M est la matrice d'un projecteur.

Par ailleurs, on a $MX = U({}^tYX) = ({}^tYX)U \in \text{Vect } U$ pour tout $X \in \mathbb{R}^p$ car ${}^tYX \in \mathbb{R}$ si bien que $\text{Im } M \subset \text{Vect } U$. Comme $M \neq 0$ puisque $MU = U \neq 0$, l'image de M est donc la droite dirigée par U . Quant à son noyau, il est formé des vecteurs $X \in \mathbb{R}^p$ tels que $MX = 0$ i.e. $({}^tYX)U = 0$ ou encore ${}^tYX = 0$ puisque tYX est un réel et U un vecteur non nul. Il s'agit donc de l'hyperplan défini par l'équation ${}^tYX = 0$ puisque $Y \neq 0$, c'est-à-dire l'hyperplan normal au vecteur Y dans \mathbb{R}^p euclidien canonique.

b. On note pour commencer que M (et donc $I_p - M$) commute avec A :

$$MA = U^tYA = U^t({}^tAY) = \varrho(A)U^tY = AU^tY = AM$$

Par ailleurs, on a $A^nU = \varrho(A)^nU$ et donc $A^nM = \varrho(A)^nM$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En remarquant que

$$\frac{1}{\varrho(A)}A - M = \frac{1}{\varrho(A)}(A - \varrho(A)U^tY) = \frac{1}{\varrho(A)}(A - AU^tY) = \frac{1}{\varrho(A)}A(I_p - M) \quad (1)$$

où $I_p - M$ représente le projecteur sur $\text{Ker } M$ parallèlement à $\text{Im } M$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\right)^n &= \left(\frac{1}{\varrho(A)}A\right)^n (I_p - M)^n = \left(\frac{1}{\varrho(A)}A\right)^n (I_p - M) \\ &= \left(\frac{1}{\varrho(A)}A\right)^n - \frac{1}{\varrho(A)^n}A^n M = \left(\frac{1}{\varrho(A)^n}A\right) - M. \end{aligned}$$

17. a. Sachant que $\mu \neq 0$ et compte-tenu de (1), on a :

$$W = \frac{1}{\mu}(A - \varrho(A)M)W = \frac{1}{\mu}A(I_p - M)W$$

d'où

$$MW = \frac{1}{\mu}AM(I_p - M)W = 0$$

sachant que A et M commutent et que $M(I_p - M) = 0$ vu que M est une matrice de projecteur.

De la relation $(A - \varrho(A)M)W = \mu W$, on déduit alors que $AW = \mu W$ c'est-à-dire que $W \neq 0$ est vecteur propre de A pour la valeur propre μ . Par suite, $|\mu| \leq \varrho(A)$.

b. Si μ , valeur propre de A d'après a., était de module égal à $\varrho(A)$, ce serait la valeur propre de module maximal de A , associée à un sous-espace propre engendré par U d'après 14.. Le vecteur U serait donc colinéaire à $W \neq 0$ et l'on aurait

$$\mu U = (A - \varrho(A)M)U = AU - \varrho(A)U^tYU = \varrho(A)U - \varrho(A)U = 0$$

d'après 15.c., ce qui contredirait $\mu \neq 0$. L'inégalité de la question a. est donc stricte : $|\mu| < \varrho(A)$.

c. Puisque le spectre de $A - \varrho(A)M$ est fini, la question b. (dont le résultat est encore valable pour $\mu = 0$ d'après 11.a.) met en évidence que $\varrho(A - \varrho(A)M) < \varrho(A)$ i.e., d'après l'homogénéité évidente de ϱ (pour tous $\alpha \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$, $\varrho(\alpha B) = |\alpha| \varrho(B)$),

$$\varrho\left(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\right) < 1.$$

D'après le résultat admis en fin de deuxième partie et la question 16.b., il en ressort que

$$\left(\frac{1}{\varrho(A)}A - M\right)^n = \left(\frac{1}{\varrho(A)}A\right)^n - M \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

i.e. que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\varrho(A)}A\right)^n = M.$$

Cinquième partie

18. a. Vu l'expression des coordonnées d'un vecteur en base orthonormale, on a $s_1 = {}^tV_0 e_1 \neq 0$ car $V_0 > 0$ par hypothèse et $|e_1| > 0$ d'après 11.e. et 13. car e_1 dirige le sous-espace propre de A pour la valeur propre de module maximal.

b. À partir de la décomposition de V_0 sur la base (e_1, \dots, e_p) , on obtient sans difficulté

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = A^n V_0 = \sum_{k=1}^p s_k \lambda_k^n e_k. \quad (2)$$

Vu l'expression de la norme en base orthonormale,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|V_n\|^2 = \sum_{k=1}^p s_k^2 \lambda_k^{2n}$$

où les termes d'indice $k \geq 2$ sont négligeables devant celui d'indice $k = 1$ car $s_1 \neq 0$ d'après a. et $|\lambda_1| > |\lambda_k|$ pour tout $k \geq 2$. Ainsi $\|V_n\|^2 \sim s_1^2 \lambda_1^{2n}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, d'où

$$\frac{\|V_{n+1}\|^2}{\|V_n\|^2} \sim \frac{s_1^2 \lambda_1^{2n+2}}{s_1^2 \lambda_1^{2n}} = \lambda_1^2 \rightarrow \lambda_1^2, \quad n \rightarrow \infty$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|V_{n+1}\|}{\|V_n\|} = |\lambda_1| = \rho(A) = \lambda_1$$

d'après **14.a.**

c. D'après (2),

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} e_1 = \left(\frac{s_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} \right) e_1 + \sum_{k=2}^p \frac{s_k \lambda_k^n}{\|V_n\|} e_k$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \frac{V_n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} e_1 \right\|^2 = \left(\frac{s_1 \lambda_1^n}{\|V_n\|} - \frac{s_1}{|s_1|} \right)^2 + \sum_{k=2}^p \frac{s_k^2 \lambda_k^{2n}}{\|V_n\|^2}.$$

D'après l'équivalent $\|V_n\| \sim |s_1| \lambda_1^n$ lorsque $n \rightarrow \infty$ obtenu en **b.**, tous les termes de la somme ci-dessus convergent vers 0 d'où finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{\|V_n\|} = \frac{s_1}{|s_1|} e_1 = \begin{cases} e_1 & \text{si } s_1 > 0 \\ -e_1 & \text{si } s_1 < 0 \end{cases}.$$

19. Le code ci-dessous convient :

Listing 1 : Calcul approché de la valeur propre maximale et d'un vecteur propre associé

```
function [V,lambda]=elements_propres(A,V0,n)
    V=V0;
    for k=1:n
        V=A*V;
    end
    W=A*V;
    lambda=sqrt((W'*W)/(V'*V));
    V=V/sqrt(V'*V);
endfunction
```

